

酉群的有限子群所生成的代数

罗来珍¹, 李兴华¹, 陶元红²

(1. 哈尔滨理工大学 理学院, 哈尔滨 150080;
2. 浙江科技学院 理学院/曙光大数据学院, 杭州 310027)

摘 要: 群表示理论是研究群的最有力的工具之一, 酉群是群论的重要研究分支。针对酉群的表示问题, 研究了一类由酉群生成的代数结构, 证明了酉群 $U(d)$ 的任何子群 H 生成的代数是 von Neumann 代数; 证明了由有限群 G 生成的群代数 $\mathbb{C}[G]$, 对于 n 的不同值, 与 I_n 型 von Neumann 代数的直和同构, 并进一步讨论了由酉群的有限子群所生成的 I 型 von Neumann 代数。研究这类酉群的子群生成的代数结构, 对于建立酉群和置换群的 Schur-Weyl 对偶有重要意义。

关键词: von Neumann 代数; 酉群; 有限群; 群表示

DOI: 10.15938/j.jhust.2021.02.018

中图分类号: O177.2 **文献标志码:** A **文章编号:** 1007-2683(2021)02-0139-04

Algebras Generated by Finite Subgroups of Unitary Groups

LUO Lai-zhen¹, LI Xing-hua¹, TAO Yuan-hong²

(1. School of Science, Harbin University of Science and Technology, Harbin 150080, China;
2. School of Big Data, Zhejiang University of Science and Technology, Hangzhou 310027, China)

Abstract: Group representation theory is one of the most powerful tools to study groups. The unitary group is an important research branch of group theories. We study a class of algebraic structures generated by unitary groups, and we prove that $\text{Alg}(H)$ is a von Neumann algebra for any subgroup H of the unitary group $U(d)$. Then we show that group algebra $\mathbb{C}[G]$, generated by a finite group G , is isomorphic to a direct sum of some von Neumann algebras of Type I_n for distinct values of n . We further discuss what kinds of von Neumann algebra of Type I can be generated by a finite unitary subgroup. It is of great significance to study the algebraic structure of the generation of subgroups of unitary groups for the establishment of Schur-Weyl duality of unitary groups and permutation groups.

Keywords: von Neumann algebra; unitary group; finite group; group representation

0 引 言

表示理论在数学中具有极其重要的作用, 正如

数学家盖尔范德(Izrail Moiseevich Gelfand)所说, 所有的数学都是某种表示理论。而有限群表示论是有限群论的核心内容, 也是研究有限群结构最强有力的工具之一。有限群表示论是在代数和数论的研究

收稿日期: 2020-06-22

基金项目: 国家自然科学基金(11761073); 航空科学基金(201958058001)

作者简介: 李兴华(1971—), 女, 硕士, 副教授;

陶元红(1973—), 女, 博士, 教授。

通信作者: 罗来珍(1980—), 女, 博士, 教授, E-mail: luolaizhen@126.com.

中产生的,后来发展成为数论、代数、几何和分析中的重要工具^[1]。随着代数学的不断发展和完善,而后产生各种表示,如群表示、代数表示,而且表示论自身已成为独立的数学分支。群表示论在很多领域都有应用,例如群表示论在直积网络中^[2]、在对称系统控制^[3]以及在群结构^[4]研究等方面都有重要应用。酉群作为重要的一类群,有很多的相关研究^[5-10],本文主要研究一类酉群的子群生成的代数结构,它对于建立酉群和置换群的 Schur-Weyl 对偶有重要意义。

设 H 是一个 Hilbert 空间, $B(H)$ 表示其上有界线性算子全体构成的集合。设 $M \subseteq B(H)$, M' 为 M 的交换子,即 H 上与 M 中每个算子可交换的有界算子全体,记作

$$M' = \{ M' \in B(H) : [M, M'] = 0, \text{ 对任意的 } M \in M \}$$

显然, M' 是包含单位元 I 的 Banach 算子代数。若 M 是自伴的,则 M' 是 H 上的 C^* -代数,从而有

$$M \subseteq M'' = M^{(iv)} = M^{(vi)} = \dots$$

$$M' = M''' = M^{(v)} = M^{(vii)} = \dots$$

定义 1^[11] H 上的 von Neumann 代数是指 $B(H)$ 的 $*$ -代数使得

$$M = M''$$

任给 $B(H)$ 的一个子集 $\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$, 由其生成的 von Neumann 代数 $\text{Alg}(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$, 即

$$\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}'' = \text{Alg}(\{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\})$$

设 $U(d)$ 为一个酉群, K 是群 $H \leq U(d)$ 的子群, 子群 K 的中心化子记作 $C_H(K)$, 是指群 H 中与子群 K 中任意元素可交换的全体元素构成的集合, 即

$$C_H(K) \stackrel{\text{def}}{=} \{V \in H : [V, W] = 0, \forall W \in K\}$$

群 H 的任意子群的中心化子也是该群的子群, 即 $C_H(K) \leq H$ 。

设 G 为酉群 $U(d)$ 的任意子群, $C(G)$ 表示 G 在 $U(d)$ 的中心化子, $C(G)$ 的中心化子记作 $C(C(G))$, 则有 $G \subseteq C(C(G))$ 。

1 预备知识

首先给出中心化子和交换子的关系:

命题 1^[12] 对任意的酉群 $U(d)$ 的子群 H , 有 $H' = \text{Alg}(C(H))$ 成立。

证明: 显然, $\text{Alg}(C(H)) \subseteq H'$ 。由于 $C(H)$ 是与 H 可交换的, H' 是自同态的且与 H 可交换, 满足

$C(H) \subseteq H'$ 。显然 H' 是 von Neumann 代数, 因此有 $\text{Alg}(C(H)) \subseteq H'$ 。

下证 $\text{Alg}(C(H)) \supseteq H'$ 。任选 $T \in H'$, 由于 H' 是 von Neumann 代数, 则对任意的 $s, t \in \mathbb{R}$, 有 $\exp(is(T + T^*))$ 和 $\exp(it(T - T^*))$ 都属于 H' , 由此

$$\exp[is(T + T^*)], \exp[it(T - T^*)] \in H'$$

从而有 $\exp[is(T + T^*)]$ 和 $\exp[it(T - T^*)]$ 都与 H 可交换。显然 $\exp[is(T + T^*)]$ 和 $\exp[it(T - T^*)]$ 是酉的, 且属于 $C(H) \subseteq \text{Alg}(C(H))$ 。由此

$$\left. \frac{d}{ds} \right|_{s=0} \exp[is(T + T^*)] = i(T + T^*) \in \text{Alg}(C(H))$$

进而

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \exp[it(T - T^*)] = (T - T^*) \in \text{Alg}(C(H))$$

由此可得, $T \in \text{Alg}(C(H))$ 。故有 $H' \subseteq \text{Alg}(C(H))$ 。

命题 2^[12] H 为一个 Hilbert 空间, $A \subseteq B(H)$ 是自伴随的, 即当 $A \in A$ 时有 $A^* \in A$ 。则 A'' 是包含 A 的最小的 von Neumann 代数。

证明: 假设 $B \subseteq B(H)$ 是包含 A 的 von Neumann 代数。只需证明 $A'' \subseteq B$, 事实上, 由于 $A \subseteq B$, 则有 $A' \supseteq B'$, 从而有 $A'' \subseteq B'' = B$ 。

定义 2^[12] H 为一个 Hilbert 空间, $M \subseteq B(H)$ 。称 A 是由 M 生成的 von Neumann 代数, 若 A 是包含 M 的最小的 von Neumann 代数, 记作 $A = C(M)$ 。

命题 3^[12] H 为一个 Hilbert 空间, $M \subseteq B(H)$, 则有 $C(M) = (M \cup M^*)''$, 其中 $M^* = \{M^* : M \in M\}$ 。

命题 4 [二次交换子定理]^[12] H 为一个 Hilbert 空间, 设 $A \subseteq B(H)$ 是自伴的且 $I \in A$ 。则下列命题等价:

(i) A 是 von Neumann 代数, 即 $A = A''$ 。

(ii) $A = \text{SOT} - [A]$; $\text{SOT} - [A]$ 表示 A 的强算子拓扑闭包;

(iii) $A = \text{WOT} - [A]$; $\text{WOT} - [A]$ 表示 A 的弱算子拓扑闭包;

(iv) $A = \sigma - \text{SOT} - [A]$; $\sigma - \text{SOT} - [A]$ 表示 A 的 σ -强算子拓扑闭包;

(v) $A = \sigma - \text{WOT} - [A]$; $\sigma - \text{WOT} - [A]$ 表示 A 的 σ -弱算子拓扑闭包。

由此我们得到结论:

定理 1 若 H 是 $U(d)$ 的子群, 则由 H 生成的代数 $\text{Alg}(H)$ 是 von Neumann 代数, 且有 $\text{Alg}(H) = H''$ 。

证明: 由于 $H \subseteq H''$, 则有 $\text{Alg}(H) \subseteq H''$ 。显然 $\text{Alg}(H)$ 是自伴的, 且单位元 $I \in \text{Alg}(H)$ 。

由于 $\text{Alg}(H)$ 是有限维的, $B(\mathbb{C}^d)$ 上所有拓扑

都是相同的,因此在各种拓扑下的闭包与 $\text{Alg}(H)$ 相同。

由命题4知, $\text{Alg}(H)$ 是 von Neumann 代数, H'' 是由 H 生成的最小的 von Neumann 代数,因此 $H'' \subseteq \text{Alg}(H)$ 。

命题5^[3] 若 H 是 $U(d)$ 的子群,则有 $(\text{Alg}(H))' = H'$ 。

证明: 由于 $\text{Alg}(H) = H''$, 从而有 $(\text{Alg}(H))' \subseteq H'$; 又由 $H \subseteq \text{Alg}(H)$, 知 $H' \supseteq (\text{Alg}(H))'$ 。对任意的 $T \in H'$, 由命题1, 对任意的 $T \in \text{Alg}(C(H))$, $\exp[s(T+T^*)]$ 和 $\exp[t(T+T^*)]$ 都属于 $C(H)$, 得到 $\exp[s(T+T^*)]$ 和 $\exp[t(T+T^*)]$ 都与 H 可交换, 从而其与 $\text{Alg}(H)$ 也可交换。即 $\exp[s(T+T^*)]$ 和 $\exp[t(T+T^*)]$ 都属于 $(\text{Alg}(H))'$, 从而有 $T \in (\text{Alg}(H))'$ 。故 $H' \subseteq (\text{Alg}(H))'$ 。

定理2 若 $V(G)$ 是有限群 G 的酉表示, 则其成的代数 $\text{Alg}(V(G))$ 是 von Neumann 代数。

证明: $V(G)$ 是 $U(d)$ 的子群, 则由定理2知, $\text{Alg}(V(G))$ 是 von Neumann 代数。

命题6^[3] $\text{Alg}(U(d)) = \text{End}(\mathbb{C}^d)$, 其中 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$ 表示全体线性算子。

证明: $U(d)$ 是 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$ 的子集, 从而有 $\text{Alg}(U(d)) \subseteq \text{End}(\mathbb{C}^d)$ 。只需要证明 $\text{Alg}(U(d)) \supseteq \text{End}(\mathbb{C}^d)$ 。对任意的非零元 $T \in \text{End}(\mathbb{C}^d)$, 由极分解定理, $T = U|T|$, 其中 $U \in U(d)$ 。令 λ_1 为 $|T|$ 的极大特征值。记 $T' = \lambda_1^{-1}|T|$ 。因此 $\|T'\| = 1$ 。

令 $V = T' + i\sqrt{1-T'^2}$ 。因此 $V \in U(d)$ 。令 $T' = \frac{1}{2}(V + V^*)$, 从而有 $T = U(\lambda_1 T') = \frac{\lambda_1}{2}(UV + UV^*)$, 即 $T \in \text{Alg}(U(d))$ 。

2 主要结果

本文的中心问题研究由有限酉子群生成的代数结构。

由命题5, 我们可以考虑满足某种条件的 von Neumann 代数。若 H 是 $U(d)$ 的子群, 且有限维 $|H| < +\infty$, 则有 $\text{Alg}(H) = \mathbb{C}[H]$ 。

在群表示论中^[4-20], 任意的有限群 H 都可以生成群代数 $\mathbb{C}[H]$ 。此外, 当生成的群代数 $\mathbb{C}[H]$ 被视为自身的表示(即正则表示)时, 这种表示具有分解: $\mathbb{C}[H] \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{H}} \text{End}(V_\alpha)$ 。其中 $\{V_\alpha: \alpha \in \hat{H}\}$ 是全不等价不可约 H -模集, $\hat{H}$ 表示等价于 V_α 的不

可约 H -模集, 从而有

$$\text{Alg}(H) \cong \bigoplus_{\alpha \in \hat{H}} \text{End}(V_\alpha) \quad (1)$$

假设 A 是包含于 $B(H)$ 的 von Neumann 代数, E 和 F 为 A 中的投影算子。

命题7^[2] von Neumann 代数 A 中的投影算子 E 是有限的当且仅当 A 中满足 $F \leq E$ 和 $F \sim E$ 的投影 F , 使得 $F = E$ 。一个 von Neumann 代数是否为有限的取决于单位元是否为有限投影算子。

命题8^[2] 若 $EAE \approx A_E$ 是 Abel 代数, 则称 E 是 Abel 投影。称代数 A 是离散的, 若对每一个非零中心投影 Z , 都有非零的 Abel 投影 F 满足 $F \leq Z$ 。称代数 A 是连续的若其不包含非零 Abel 投影。称 A 中投影 E 是连续或离散的, 若其压缩代数 A_E 是连续或者离散的。

定义3^[2] A 是 von Neumann 代数, 称

- (i) A 是 I 型的, 若它是连续的;
- (ii) A 是 II 型的, 若它是连续的且每一个非零中心投影控制一个非零有限投影;
- (iii) A 是 III 型的, 若它不包含非零有限投影;
- (iv) A 是 I_n 型的, 若它是 I 型且有限的;
- (v) A 是 I_∞ 型的, 若它是 I 型且无限的;
- (vi) A 是 II_1 型的, 若它是 II 型且有限的;
- (vii) A 是 II_∞ 型的, 若它是 II 型且无限的;

例1^[2] 若 $\dim(H) = \infty$, $B(H)$ 是 I 型, 则有 $B(H)$ 是 I_∞ 型; 若 $\dim(H) = n < \infty$, 则 $B(H)$ 是 I_n 型。

本文主要研究 I 型 von Neumann 代数, 事实上, 在式(1)中, 考虑对于某些不同的 n , 同构于 I_n 型 von Neumann 代数中的直和的 von Neumann 代数。

由此我们研究的问题转化为每个 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$ 可由有限酉子群生成。

定理3 对酉群 $U(d)$, 存在有限酉子群 H , 使得 $\text{End}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C}[H]$ 。

证明: 令 H_0 表示 d 维的广义的 Pauli 算子, $H_0 = \{X^a Z^b: a, b = 0, 1, \dots, d-1\}$, 广义 Pauli 算子作用在计算基

$$X|j\rangle = |j+1 \bmod d\rangle \text{ and } Z|j\rangle = \omega^j |j\rangle$$

其中 $\omega = \exp(2\pi i/d)$ 。这个算子也被称作 Heisenberg-Weyl 算子。显然,

$$ZX = \omega XZ$$

且对任意的 $a, b \in \mathbb{Z}_d$, 有

$$X^a Z^b = \omega^{ab} Z^b X^a, Z^b X^a = \omega^{-ab} X^a Z^b$$

从而对任意的 $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_d$,

$$X^a Z^b X^c Z^d = \omega^{ad-cb} X^c Z^d X^a Z^b$$

进而得到

$$X^a |j\rangle = |j+a \bmod d\rangle, Z^b |j\rangle = \omega^{bj} |j\rangle \\ (X^a)^* |j\rangle = |j-a \bmod d\rangle, (Z^b)^* |j\rangle = \omega^{-bj} |j\rangle$$

H_0 是 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$ 的一组基,这是因为

$$\langle X^a Z^b, X^{a'} Z^{b'} \rangle = d \delta_{a',a} \delta_{b',b}$$

事实上,

$$\langle X^a Z^b, X^{a'} Z^{b'} \rangle = \text{Tr}(X^{a'-a} Z^{b'-b}) = \\ \sum_{j=0}^{d-1} \langle j | X^{a'-a} Z^{b'-b} | j \rangle = \\ \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{(b'-b)j} \langle j | X^{a'-a} | j \rangle = \delta_{a',a} \sum_{j=0}^{d-1} \omega^{(b'-b)j} = d \delta_{a',a} \delta_{b',b}$$

故 $\text{End}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C} [H_0]$ 。

为了构造群 H 生成 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$, 令

$$H = \{ \omega^c X^a Z^b : a, b, c = 0, 1, \dots, d-1 \}$$

其中 $|H| = d^3$ 。则 H 是一个有限酉子群,故有 $\text{End}(\mathbb{C}^d) = \mathbb{C} [H]$ 。

从上述定理可以看出,有限维 Hilbert 空间上的每个 von Neumann 代数都可以由作用在同一 Hilbert 空间上的有限酉子群生成。

3 结 论

通过构造酉群(作为连续群)的有限子群从而证明 $\text{End}(\mathbb{C}^d)$ 可作为有限群的群代数。也就是说,有限维 Hilbert 空间上的每一个 von Neumann 代数同构于它的某个有限群的群代数。事实上,我们还可以考虑问题:是否存在一个酉群的有限子群 G 并且 $|G| < d^3$ 使得 $\text{Alg}(G) = \text{End}(\mathbb{C}^d)$ 。

参 考 文 献:

- [1] 王昌,刘瑶瑶. 有限群表示论的历史溯源 [J]. 自然辩证法通讯, 2019, 41(5): 67.
WANG C. LIU Y. The Historical Development of the Representation Theory of Finite Groups [J]. Journal of Dialectics of Nature, 2019, 41(5): 67.
- [2] 邓宏钧,潘福铮. 群表示论在直积网络中的一个应用 [J]. 应用数学学报, 1987, 10(3): 276.
DENG H J. PAN F Z. An Application of the Group Representation Theory in Direct Production Network [J]. Acta Mathematicae Applicatae Sinica, 1987, 10(3): 276.
- [3] 吴志刚. 群表示理论在对称系统 H_2/H_∞ 控制中的一些应用 [J]. 动力学与控制学报, 2005, 3(2): 5.
WU Z G. Application of Group Representation Theory in H_2/H_∞ Control of Symmetric Systems [J]. Journal of Dynamics and Control, 2005, 3(2): 5.

- [4] 张复兴. 群表示理论在群结构研究中的应用 [J]. 邵阳学院学报(自然科学版), 2010, 7(2): 1.
ZHANG F X. The Application of The Theory About Group Representation on Group Structure [J]. Journal of Shaoyang University (Natural Science Edition), 2010, 7(2): 1.
- [5] PHILIP A D. Strong Uncountable Cofinality for Unitary Groups of Von Neumann Algebras [J]. Forum Mathematicum, 2020, 32(3): 773.
- [6] FARROKH S, ALI I, FARIDEH S. Complex Group Algebras of Almost Simple Unitary Groups [J]. Communications in Algebra—Volume, 2020, 48(5): 1919.
- [7] AUKHADIEV M A, KUZNETSOVA Y N. Quantum Semigroups Generated by Locally Compact Semigroups [J]. Illinois Journal of Mathematics, 2018, 62(1/4): 41.
- [8] ANDO H, MATSUZAWA Y. Lie Group-Lie Algebra Correspondences of Unitary Groups in Finite Von Neumann Algebras [J]. Hokkaido Mathematical Journal, 2010, 41(1): 30.
- [9] KEVIN M. C^* -algebras Generated by Elements of a Unitary Matrix [J]. Journal of Functional Analysis, 1992, 107(2): 439.
- [10] BALOGH Z A. On Unitary Subgroups of Group Algebras [J]. International Electronic Journal of Algebra, 2021, 29: 187.
- [11] IMAN M R, ROBERT W S. A Generalization of Schur-Weyl Duality with Applications in Quantum Estimation [J]. Communications in Mathematical Physics, 2014(331): 431.
- [12] JOHN B C. A Course in Operator Theory [M]. Graduate Studies in Mathematics, AMS Providence, Rhode Island, 1999.
- [13] GEORGE W M. Unitary Group Representations in Physics, Probability and Number Theory [M]. Mathematics Lecture Notes Series, 1978.
- [14] FULTON W, HARRIS J. Representation Theory: A First Course [M]. Springer-Verlag New York, Inc., 1991.
- [15] BENJAMIN S. Representation Theory of Finite Groups: An Introductory Approach (Universitext) [M]. Springer-Verlag New York, Inc., 2011.
- [16] CHARLES W. Representation Theory of Finite Groups and Associative Algebras (Ams Chelsea Publishing) [M]. Springer-Verlag New York, Inc., 2006.
- [17] HANS K, BEND S. The Theory of Finite Groups: An Introduction (Universitext) [M]. Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [18] JEAN-PIERRE S, LEOHARD L S. Linear Representations of Finite Groups [M]. (Graduate Texts in Mathematics), Springer-Verlag New York, Inc., 1996.
- [19] MAZORCHUK V, TUROWSKA L. $*$ -Representations of Twisted Generalized Weyl Constructions [J]. Algebras and Representation Theory, 2002, 5(2): 163.
- [20] COSSIDENTE A, KING O H. Maximal Orthogonal Subgroups of Finite Unitary Groups [J]. Journal of Group Theory, 2004, 7(4): 447.

(编辑: 王 萍)